# Messung der Mondentfernung bei einer Mondfinsternis

von Joachim Spindler

veröffentlicht im VdS-.Journal für Astronomie, Heft 57, II/16

Eratosthenes war ein schlaues Kerlchen. Er wies schon nach 309 v. Chr. eindeutig die Kugelgestalt der Erde nach und vermaß sie auch sogleich. Durch die unterschiedlichen Einfallswinkel der Sonne in Syene und Alexandria unter Zuhilfenahme der Entfernung der beiden Orte konnte er den Erdumfang mit 40000 km sehr genau bestimmen. Wie er das genau bewerkstelligte, kann man leicht in der Literatur und im Internet nachlesen.

Mich beschäftigte die Frage: Hätte er mit ähnlich einfachen Mitteln auch die Entfernung Erde-Mond bestimmen können? Ich komme zum Ergebnis: Ja!

Bei eine totalen Sonnenfinsternis beobachte ich wie sich der Mond vor die Sonne schiebt und sie komplett verdeckt, obwohl er sehr viel kleiner ist, nämlich über 400 mal kleiner. Unserem Trabanten gelingt diese außergewöhnliche Vorführung, weil er uns auch 400 mal näher als die Sonne steht. Das mathematische Prinzip, das dahinter steht, ist der Strahlensatz. Und das ist sehr einfach:

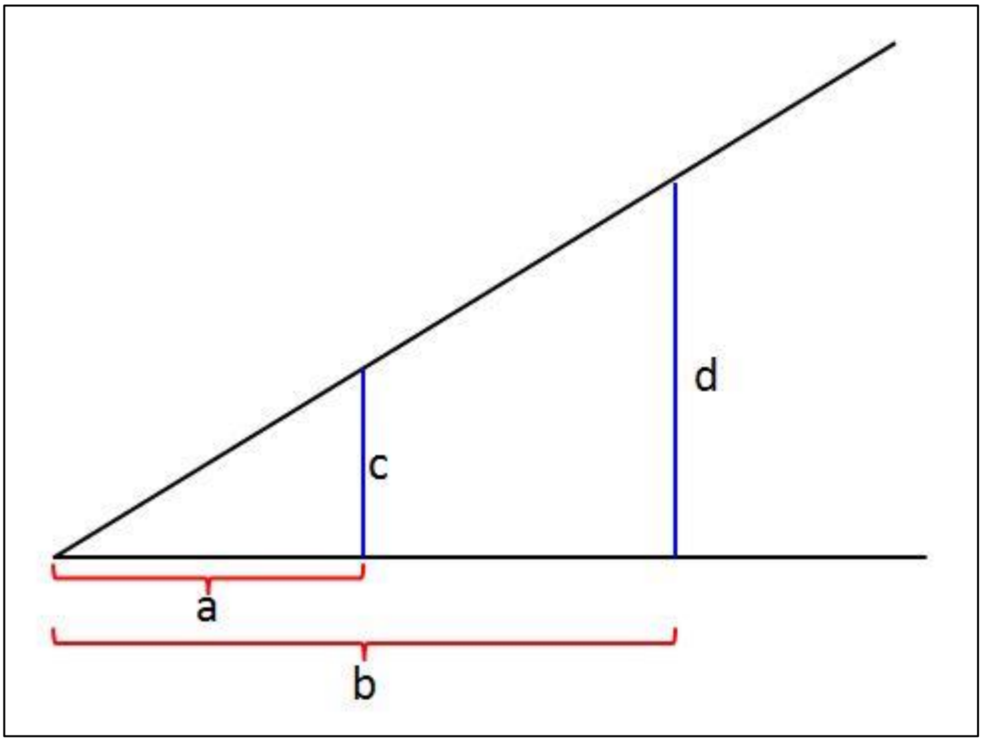



Bild 1: Prinzip des Strahlensatzes

Werden zwei sich schneidende Geraden von zwei parallelen Geraden durchkreuzt (Bild 1), dann stehen die Streckenabschnitte a, b, c und d in einem festen Verhältnis.

$$a : b = c : d$$

Wende ich diese abstrakte Beschreibung auf das Erde-Mond-System bei einer Mondfinsternis an und stelle ich mir vor, ich stünde am Schnittpunkt der Geraden, dann ergibt sich dieser einfache Messaufbau wie in Bild 7 gezeigt.

In einer Entfernung $E_{CD}$ von meiner Beobachtungsposition aus, die ich bei der Mondfinsternis messen muss, plaziere ich eine CD mit dem Durchmesser $D_{CD}$. Während der Mondfinsternis vergleiche ich die scheinbare Größe der CD-Scheibe mit der Größe des Erdschatten $D_S$ in der Mondentfernung $E_{Mond}$. Die Mondscheibe dient mir gewissermaßen als Projektionsfläche für den Erdschatten.

Theoretisch sind mir nun 3 Parameter bekannt und einer, nämlich die Mondentfernung, unbekannt. Enthält eine Gleichung eine Unbekannte, so ist die Gleichung lösbar.

In der Praxis ist die Durchführung nicht ganz so simpel. Ich muss noch ein paar Kleinigkeiten beachten:

1. Die beleuchtete Mondoberfläche ist sehr hell und überstrahlt den Rand der CD, so dass ich den Schattenverlauf nicht mehr sicher erkennen kann.

2. Wegen der Ausdehnung der Sonnenscheibe verjüngt sich der Kernschatten mit zunehmender Entfernung von der Erde. Ich kann also nicht unmittelbar den Erddurchmesser dem Schattendurchmesser gleichsetzen.

3. Ich kann auf der Mondoberfläche nur einen kleinen Ausschnitt des gesamten Erdschattens erkennen.

Die Blendung durch die hellerleuchtete Mondoberfläche kann ich mit zwei gegeneinander drehbaren Polarisationsfiltern beherrschen, die ich dem optischen Zubehör eines Physikbuchs entnommen hatte. So kann ich stufenlos die Helligkeit des Mondlichts regulieren. Wer nicht dieses Glück hat, kann auch 2 Sonnenbrillen übereinander aufsetzen. Das müsste auch funktionieren. Eratosthenes hätte es hier eindeutig schwerer gehabt. Er hätte es mit einer feinen Lochblende versuchen können.

Die tatsächliche Größe des Kernschattens kann ich berechnen, weil ich weiß, dass die Sonnenscheibe eine Winkelausdehnung von ungefähr 0,5° aufweist. Unter diesem Winkel verjüngt sich dann auch der Erdschatten.

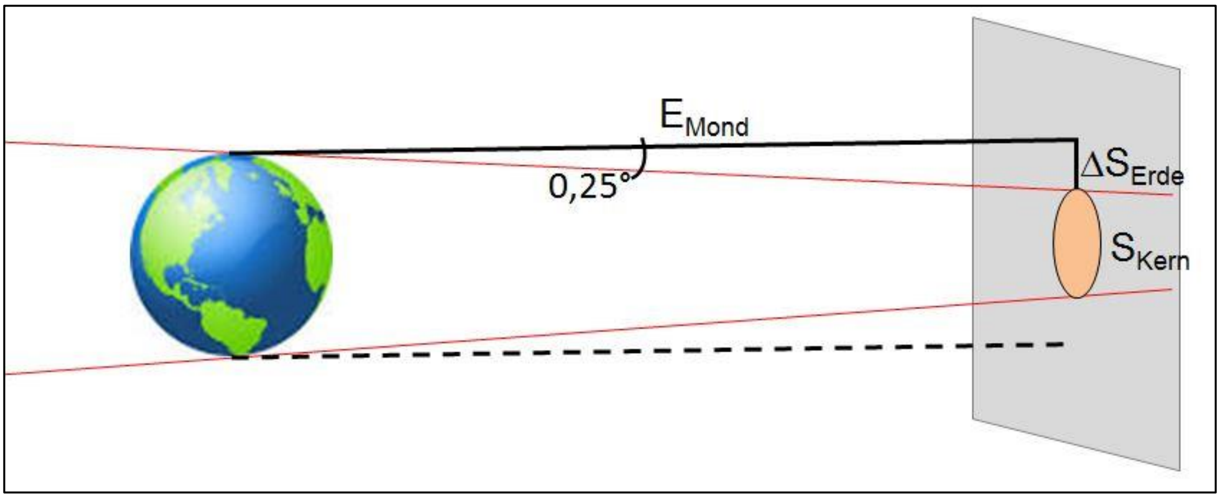


Bild 2: Die Geometrie zum Messverfahren

Der Schatten der Erde ($D_S$) in Abhängigkeit von der Entfernung ($E_{Mond}$) beträgt

$$D_S = D_{Erde} - 2 \cdot \Delta S_{Erde}.$$

Der Durchmesser der Erde ($D_{Erde}$) ist mit 12700 km bekannt. Die Korrektur des Erdschattens ($\Delta S_{Erde}$) bestimme ich durch die trigonometrische Funktion $\Delta S_{Erde} = E_{Mond} \cdot \text{tg } 0{,}25°$ (Bild 2). Also hat der Erdschatten $D_S$ einen Durchmesser von:

$$D_S = (D_{Erde} - 2 \cdot E_{Mond} \cdot \text{tg } 0{,}25°)$$

Mit einem wenig Umformen wird aus der Formel des Strahlensatzes die Gleichung:

$$E_{Mond} = (E_{CD} \cdot D_{Erde}) / (D_{CD} + 2 \cdot E_{CD} \cdot \text{tg } 0{,}25°)$$

(Die Herleitung dieser Formel ist im Anhang Schritt für Schritt gezeigt.)

Nach der Theorie kommt jetzt die Praxis. Mit einer einfachen Rechnung bekomme ich eine Vorstellung, dass ich einen sehr, sehr langen Arm bräuchte um die CD gegen den Mond zu halten. Also muss ich mir eine Haltevorrichtung für die CD bauen und auch die Höhe der Montierung im Auge behalten. Ich komme auf eine Entfernung zwischen Auge und CD von 3 bis 4 Metern. Wenn der Mond 30° über dem Horizont steht, müsste sich die CD in einer Höhe von 3,5 m befinden, wenn ich bei der Messung nicht wie ein Käfer auf dem Rücken liegen will. Die Messung nach dem Zeitpunkt der Totalität am 28.09.15 verspricht mehr

Entspannung, weil der Mond auf 15° abgesunken ist und es für eine komfortable Beobachtung in der Hocke ausreicht die CD auf einer Höhe von 2,8 m anzubringen.

Mit einfachen Mitteln baue ich mir aus einem Fotostativ, bei dem ich die Montageplatte kopfüber in das Stativ einstecke (Bild 3), einem 1,5 m langem Rundholz und einem kurzen Stück Vierkantholz eine Klemmvorrichtung für die CD (Bild 4).

Bild 3: Stativ

Bild 4: Klemmevorrichtung


Bild 5: CD

Bild 6: CD fixieren

Für eine gute Entfernungsmessung befestige ich eine Schnur von 5 m Länge mit einem Pappkarton an das Zentrum der CD (Bild 5). Da ich ungefähr mit einer Entfernung von 3 – 4 Metern rechne, klebe ich mit einem transparenten Paketband ein Papiermaßband an der richtigen Stelle an die Schnur. Solche Maßbänder gibt es oft beim Holzzuschnitt in Baumärkten und sie kosten nichts.

Jetzt noch ein Schreibblock und Bleistift und die Aktion kann losgehen.

Der Wecker wirft mich um 1 Uhr nachts aus dem Bett. Das Auto steht schon voll beladen mit allem, was ich brauche, in der Garage und ist abfahrbereit. Auf meiner Sternwarte über dem Tal bläst mir ein kräftiger und auch kalter Wind entgegen. Ich baue mein Teleskop mit CCD-Kamera, mein Fotostativ für die Canon Powershot und natürlich meine Entfernungsmesseinrichtung auf. In regelmäßigen Abständen schieße ich Fotos von der fortschreitenden Bedeckung des Mondes. Beginnend mit einer Belichtungszeit von 1/1000 Sekunde bin ich bei der Totalität bei 5 Sekunden angekommen. Überraschend dunkel ist der Mond, aber auch dunkelrot, wie angekündigt. Jetzt bewegt sich der Mond aus dem Erdschatten heraus. Endlich ist die Hälfte des Mondes wieder hell beleuchtet und die Schattenlinie am längsten. Ich starte meine Messungen.

Bild 7: Peilen 1

Bild 8: Peilen 2

Mit einer Hand halte ich leicht gespannt die Schnur mit der Messskala und in der anderen halte ich den Dämpfungsfilter vor das beobachtende Auge (Bild 7 und 8).

Durch Bewegung des Kopfes dirigiere ich die Silhouette der CD auf den Schattenrand des Erdschattens zu. Dabei schaue ich wie gut sich die Krümmungen gleichen. Berührt die Kontur der CD den Schatten nur in einem Punkt, dann ist der Abstand zu groß. Berührt der Rand der CD den Erdschatten an zwei Punkten und dazwischen bleibt der Schatten sichtbar, dann bin ich zu nahe. Durch Entfernen oder auf die CD Zubewegen variiere ich so lange die Krümmung der CD, bis der CD-Rand parallel zum Erdschatten verläuft. Auf dem Maßband lese ich die Distanz zur CD ab und notiere sie mir. Ein kurze Pause und ich wiederhole die Messung. Nach 4 Messungen habe ich genug Zahlen um mich an die Auswertung zu machen

| **Meine Messwerte vom 28.09.15:** | | |
|---|---|---|
| **Nr.** | $E_{CD}$ | $E_{Mond}$ |
| 1 | 3,92 | 322835 |
| 2 | 3,87 | 319622 |
| 3 | 3,89 | 320909 |
| 4 | 3,81 | 315742 |

Tabelle 1

Im Mittel erhalte ich eine Mondentfernung von 319.777 km. Tatsächlich beträgt die Entfernung 353.962 km. Die Abweichung von nur 9% überrascht mich. Ich hatte etwa 20% erwartet.

Als Nebenprodukt kann ich jetzt die Größe des Mondes berechnen. Bei einem Winkeldurchmesser von 0,5° ergibt sich mit der gemessenen Entfernung ein Monddurchmesser von 2.790 km. In der Literatur wird ein Wert von 3.476 km angegeben.

Meine Fotoserie setze ich fort, bis im Osten schon fast die Sonne aufgeht. Extrem zufrieden packe ich meine Utensilien wieder ein. Zu Hause trinke ich einen heißen Tee bevor ich mich entspannt ins Bett lege, um den verlorenen Schlaf nachzuholen.

Wer Lust bekommen hat es auch mal selbst an dem beschriebenen Messverfahren zu versuchen, der möge sich die Mondfinsternis am 27.07.2018 vormerken. Der Mond geht dann schon fast verdunkelt über dem Osthorizont auf. Das Austreten aus dem Schatten findet in 17° Höhe statt und ist für eine Messung in einer bequeme Position geeignet.

Viel Spaß bei der Vorbereitung und dann bei der Auswertung der Messergebnisse.

# Anhang

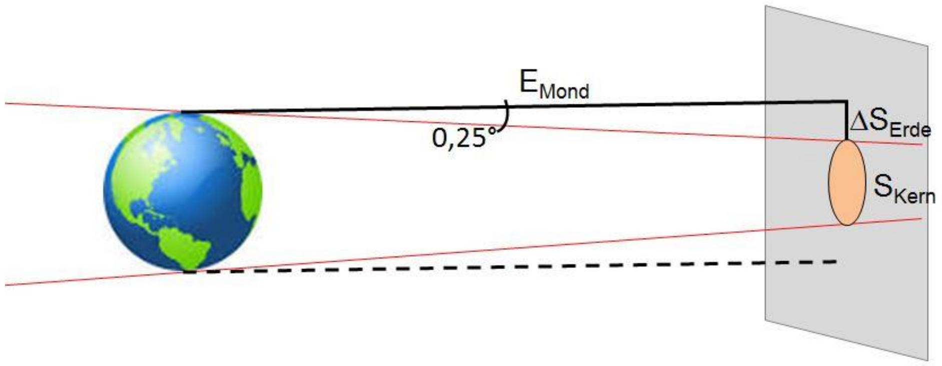
## Herleitung der Mondentfernung durch Messen des Kernschattens der Erde auf der Mondoberfläche bei einer Mondfinsternis

<u>Gegeben sind</u>:

| | |
|---|---|
| Erddurchmesser der Erde | $D_{Erde} = 12{,}7 \cdot 10^6$ m |
| Durchmesser der CD | $D_{CD} = 0{,}12$ m |
| Entfernung der CD vom Beobachter | $E_{CD} = 3{,}8725$ m (durch Messung) |
| Durchmesser des Kernschattens | $S_{Kern}$ (durch Berechnung) |

<u>gesucht</u>:

| | |
|---|---|
| Entfernung zum Mond: | $E_{Mond}$ |




$$S_{Kern} = D_{Erde} - 2\,E_{Mond}\;tg\;0{,}25°$$

$$\frac{E_{CD}}{E_{Mond}} = \frac{D_{CD}}{S_{Kern}}$$

$$\frac{E_{CD}}{E_{Mond}} = \frac{D_{CD}}{D_{Erde} - 2\,E_{Mond}\;tg\;0{,}25°}$$

$$E_{Mond} = \frac{D_{Erde} - 2\,E_{Mond}\;tg\;0{,}25°}{D_{CD}}\,E_{CD}$$

$$E_{Mond} = \frac{E_{CD}\,D_{Erde}}{D_{CD}} - \frac{2\,E_{Mond}\,E_{CD}\;tg\;0{,}25°}{D_{CD}}$$

$$E_{Mond} + \frac{2\,E_{Mond}\,E_{CD}\;tg\;0{,}25°}{D_{CD}} = \frac{E_{CD}\,D_{Erde}}{D_{CD}}$$

$$E_{Mond}\left(1 + \frac{2\,E_{CD}\;tg\;0{,}25°}{D_{CD}}\right) = \frac{E_{CD}\,D_{Erde}}{D_{CD}}$$

$$E_{Mond}\left(\frac{D_{CD} + 2\,E_{CD}\;tg\;0{,}25°}{D_{CD}}\right) = \frac{E_{CD}\,D_{Erde}}{D_{CD}}$$

$$E_{Mond} = \frac{E_{CD}\,D_{Erde}}{D_{CD}}\;\frac{D_{CD}}{D_{CD} + 2\,E_{CD}\;tg\;0{,}25°}$$

$$E_{Mond} = \frac{E_{CD}\,D_{Erde}}{D_{CD} + 2\,E_{CD}\;tg\;0{,}25°}$$

$$E_{Mond} = \frac{3{,}8725m \;\cdot\; 12{,}7 \cdot 10^6 m}{0{,}12m + 2 \cdot 3{,}8725m \cdot\; tg\;0{,}25°}$$

$$\boldsymbol{E_{Mond} = 319\,783\;km}$$